

《 _____ 초전도이론 보고서 》

하이에듀

주제	초전도현상
요약	<p>1911년 저온의 수은에서 초전도 현상이 발견된 이후 이를 설명하기 위한 수 많은 노력이 있었습니다. 1933년 마이스너 효과가 발견되었고, 1940년대 -1950년대에 걸쳐 이에 대한 현상론적 이론인 런던 방정식과 린드버그-란다우 이론이 등장합니다. 이는 초전도 현상의 원인을 설명하진 못하지만 현상의 예측에 도움이 됩니다. 뉴턴의 냉각곡선이 열전도의 원인을 설명하지는 못해도 온도가 어떤 그래프를 그리며 떨어질 것이다 예측을 가능하게 해주는 것과 비슷한 맥락입니다. 이후 양자역학이 매우 빠르게 발전하며 BCS 이론이 등장합니다. 이론의 개발자인 쿠퍼는 초전도 현상은 보스-아인슈타인 응축 현상인 초전자가 만드는 현상이기 때문에 페르미온인 전자 두 개가 쌍을 이뤄 보손이 되어야 한다는 것에서 착안하여 쿠퍼 쌍이라는 개념을 제시하였습니다. 그 후 BCS 해밀토니안과 슈리퍼 파동방정식을 이용해 저온초전도 현상을 더 정밀하게 예측하는 것이 가능해졌습니다. 초전도현상을 비유하자면 딱 막힌 고속도로의 자동차들이 모두 같은 속도로 달려 정체가 없는 모습이라고 할 수 있습니다. BCS이론의 한 가지 한계점은 30켈빈 이상의 고온초전도에 대해선 설명할 수 없기 때문에 고온의 초전도를 설명하는 이론은 아직 정립되지 않았습니다.</p> <p>참고 문헌 : Solid-state physics :an introduction to principles of materials science, Ibach, HBerlin ;New York :Springer,c2003. 이종수, 최신 고체 물리학</p>

자료 1. 저온 초전도 현상의 발견

268 10 Superconductivity

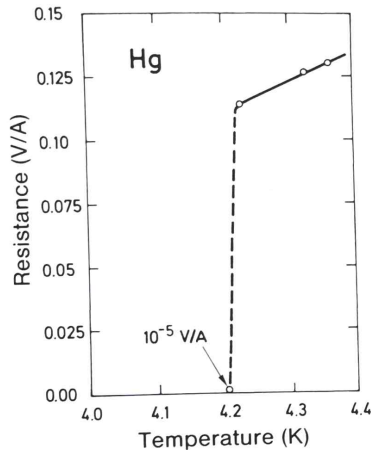


Fig. 10.1. Original measurement curve for Hg with which, in 1911, the phenomenon of superconductivity was first discovered. On cooling to below 4.2 K, the electrical resistance falls below the experimental detection limit (at that time $\sim 10^{-5} \Omega$). (After [10.1])

1911년 네덜란드 물리학자 온네스가 수은에서 초전도를 발견한 이후 초전도는 고체물리학의 주요 연구 분야로 자리매김합니다. 당시 1900년대 초, 저온물리학의 주요 이슈는 극저온에서 금속의 전기저항이 어떻게 될 것인가 하는 것이었습니다. 1908년 온네스는 액화 헬륨을 만드는 데 성공하여 온도를 0.9켈빈까지 내리는 데 성공합니다. 그는 자신의 액화 헬륨을 이용하여 금속의 전기저항을 측정하였는데, 1911년 수은, 주석, 납 등에서 전기저항이 0이 되는 현상을 발견합니다. 이후 1933년 마이스너와 오센펠트가 완전 반자성에 의한 마이스너 효과를 발견했고, 1950년에 초전도의 현상이론인 긴즈버그-란다우 이론이 발표됩니다. 하지만 이 이론은 열역학적 자유 에너지를 이용한 현상론적인 이론이고, 양자역학적 근본 원리를 제시하지는 못하였습니다. 그 후 1957년 바딘, 쿠퍼, 슈리퍼에 의해 BCS이론이 개발됨으로써 초전도의 근본 원리가 밝혀집니다. 이 이론은 초전도 전이온도가 30켈빈을 넘지 않을 것이라고 예측합니다. 이 후 1986년 스위스 물리학자 베드노츠와 물러가 35켈빈의 전이온도를 갖는 초전도체를 발견하여 고온초전도체의 장이 열립니다. 그 이후 더 높은 온도에서 초전도 현상이 발견되고 있지만 이를 설명하는 이론은 아직 없습니다. 이 보고서는 초전도의 기본적 특성과 관련 이론을 중심으로 서술하였습니다.

자료 2. 초전도의 기본 특성

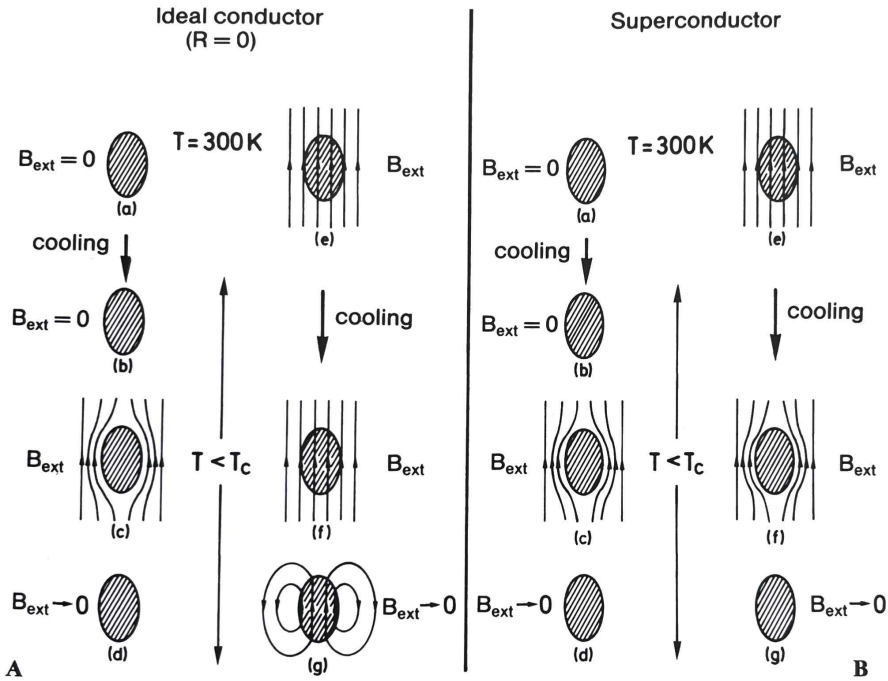


Fig. 10.4. Magnetic behavior of an ideal conductor (A) and a superconductor (B): (A) In an ideal conductor, the final state (d) or (g) depends on whether the sample is first cooled to below T_c before applying the magnetic field B_{ext} , or alternatively, cooled in the presence of the field. (a \rightarrow b) The sample loses its resistance when cooled in a field-free region. (c) Application of B_{ext} to sample with zero resistance. (d) Magnetic field B_{ext} switched off. (e \rightarrow f) Sample loses its resistance in the magnetic field. (g) Magnetic field B_{ext} switched off. (B) For a superconductor, the final states (d) and (g) are identical, regardless of whether B_{ext} is switched on before or after cooling the sample: (a \rightarrow b) sample loses its resistance upon cooling in the absence of a magnetic field. (c) Application of the field B_{ext} to the superconducting sample. (d) B_{ext} switched off. (e \rightarrow f) Sample becomes superconducting in the applied magnetic field. (g) Magnetic field B_{ext} switched off

초전도의 기본 특성 두 가지는 0의 전기저항과 완전 반자성입니다. 영의 전기저항은 초전도 전이온도 이하에서 전기저항이 완전히 사라지고 완전 도체가 되는 것입니다. 이런 완전 도체는 한번 전류가 흐르기 시작하면 전력 손실없이 영원히 전류가 흐르게 됩니다. 마이스너 효과라 불리는 완전 반자성은 초전도 내부에 자기장이 0이 되기 때문에 생깁니다. 내부 자기장이 0이 되기 위해선 외부에서 가해준 자기장을 밀어내야만 가능한데, 그것은 초전도 표현에서 렌츠의 법칙에 의해 외부 자기장을 밀어내는 방향으로 초전류가 흐르기 때문입니다.

자료 3. 런던 방정식과 긴즈버그-린다우 이론

전자의 움직임을 설명하는데 있어서 드루드 모델을 이용하는 것은 유용합니다. 드루드 모델은 전자가 전기장 하에서 힘을 받아 움직일 때 전자의 움직임을 방해하는 저항력이 있

다는 것을 가정한 모형입니다. 이를 통해 일정한 전기저항이 형성됩니다. 1935년 독일의 물리학자 런던 형제는 드루드 모델을 기반으로 아주 간단한 모형을 세워 초전도를 설명합니다. 드루드모델에서 전자의 운동방정식은 $m \frac{dv}{dt} = eE - Gv$ 로 주어지고 우변의 마지막 항이 저항력을 나타냅니다. 런던 방정식은 $Gv = 0$ 으로 가정하고 출발합니다. 초전류 $J_s = n_s e v_s$ 를 시간에 대해 미분하고 맥스웰 방정식에 적용한다음 양 변에 curl을 적용하면 $\nabla^2 \dot{B} = \frac{1}{\alpha} \dot{B}$ 인 것을 알 수 있습니다. 이 식의 해는 $\dot{B} = \dot{B}_a \exp(-\frac{x}{\sqrt{\alpha}})$ 입니다. 런던 형제는 완전 반자성을 기술하려면 위 식에서 시간 미분을 제거해야 한다고 생각했고 식은 $B = B_a \exp(-\frac{x}{\sqrt{\alpha}})$ 가 됩니다. 이 식은 자기장이 초전도 표면에서 지수함수적으로 감소하여 시료 내부에서는 자기장이 0이 되는 것을 의미합니다. 즉, $B = -\Lambda \nabla \times J_s$ 로 자기장이 가해지면 초전도 표면에서는 자기장이 들어오는 것을 방해하는 음의 방향으로 초전류의 소용돌이가 생긴다는 것을 의미합니다.

런던 방정식이 전자기학을 이용하여 초전도를 현상적으로 설명하고 있다면, 긴즈버그-란다우 이론은 열역학적 자유 에너지를 이용하여 초전도 현상을 설명합니다. 1950년에 발표된 이 이론은 미시적인 초전도 메커니즘을 정확하게 이해하는 데는 도움을 주지 못해도 낮은 자유 에너지를 찾아가고자 하는 자연의 본성을 수학적으로 기술한 이론입니다. 긴즈버그와 란다우는 미시적 관점에서 초전류를 질서변수로 채택해야 함을 깨달았습니다. 초전류를 측정할 순 없지만 이해할 순 있습니다. 초전도 현상은 모든 전자들이 같은 에너지와 운동량을 갖기 때문에 나타나는 현상입니다. 고속도로에서 자동차들이 짝 들어차 있더라도 같은 방향으로 같은 속도로 간다고 생각하면 저항없이 모두 미끄러져 갈 것입니다. 고속도로 정체가 생기는 이유는 자동차들의 속도가 제각각이기 때문입니다. 운동량과 에너지가 같다고 하면 그것은 양자역학적으로 보손 입자여야 하고 보스-아인슈타인 응축이란 소립니다. 전자는 스핀이 1/2인 페르미온이기 때문에 보손입자가 되기 위해선 전자 2개가 짝을 이루어야 합니다. 따라서 초전류의 질량, 전하는 전자의 2배가 되어야하고 밀도는 1/2이 되어야합니다.

유도식은 복잡하지만 초전도 상태는 깁스 자유 에너지가 최소가 되는 지점에서 발생합니다. 깁스 자유 에너지에서 포함하고 있는 내재적 함수는 초전도 질서변수와 벡터 퍼텐셜이고 자유 에너지는 이 둘에 대해 각각 미분하여 최소값을 구할 수 있습니다. 그렇게 초전도 질서변수 ϕ 에 대해 미분하여 얻은 제1 긴즈버그-란다우 방정식

$$-\frac{\hbar}{2m^*} (\nabla + \frac{ie^*}{\hbar} A)^2 \phi + a\phi + \frac{b}{2} |\phi|^2 \phi = 0 \text{ 입니다.}$$

두 번째로는 벡터퍼텐셜에 대해 미분하여 얻은 제2 긴즈버스-란다우 방정식

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times B = J = \frac{\hbar e^*}{2m^* i} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*} A |\phi|^2 \text{ 입니다.}$$

긴즈버그-란다우 방정식을 초전도 내부와 표면에서 풀어봅시다. 먼저 초전도 내부에서는 마이스너 상태에 의해 자기장이 0이고, 이에 따라 벡터 퍼텐셜도 0입니다. 이것은 초전도

질서변수가 균일해서 위치에 따라 초전자의 전류밀도가 일정하다는 것을 의미하고, 수학적으로는 초전도의 질서변수가 라플라스 방정식을 따르게 됩니다. 초전도 표면의 경우 방정식의 해는 $\varphi = \varphi_{\infty} \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right)$ 입니다. 엑스가 0으로 가는 극한에서 파이가 0, 엑스가 무한이라면 파이_무한으로 수렴할 것입니다.

이 긴즈버그-란다우 방정식은 초전도에서 자기장이 양자화된다는 것을 말해주고 초전도 현상은 지금도 대표적인 거시적인 양자 현상 중 하나입니다. 또한 제 1형 초전도와 제 2형 초전도를 설명할 수 있습니다.

자료 4. BCS 이론으로 설명한 초전도현상

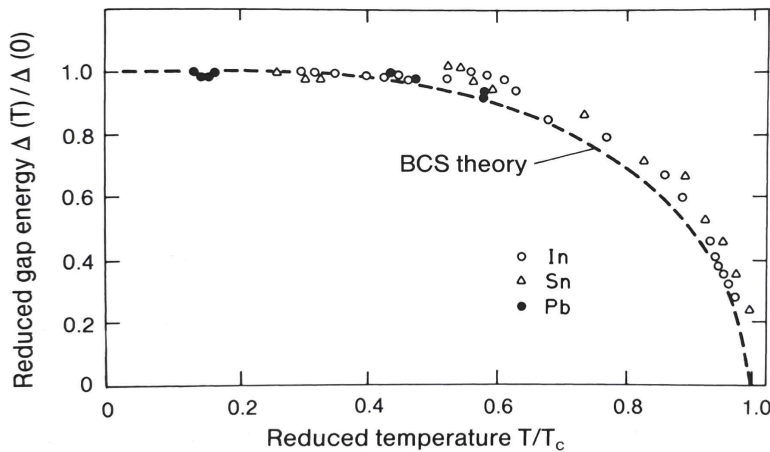


Fig. 10.16. Temperature dependence of the gap energy $\Delta(T)$ relative to the value $\Delta(0)$ at $T=0$ for In, Sn and Pb. Values determined from tunnel experiments (Panel IX) are compared with those predicted by BCS theory (dashed). (After [10.12])

BCS 이론은 초전도의 근본 메커니즘을 규명했습니다. 바딘, 쿠퍼, 슈리퍼의 이름을 딴 이 이론은 일리노이 대학에서 바딘이 쿠퍼와 슈리퍼를 포스트닥 연구원으로 고용하며 시작됩니다. 쿠퍼는 연구원이 된 지 얼마 지나지 않아 쿠퍼 쌍이 초전도를 일으키는 초전자의 형성 원리라는 것을 규명했습니다. 그러자 초전도의 거시적 물리현상을 쿠퍼쌍으로 설명하기 위한 논의가 불붙었습니다. 이를 위해선 쿠퍼 쌍의 슈뢰딩거 방정식을 풀어야 하는데, 수많은 전자들을 어떻게 다루어야 할지 난감했습니다. 그러던 중 슈리퍼가 뉴욕의 지하철을 타고 집으로 가고 있을 때 번뜩이는 아이디어가 생각나 슈리퍼 파동함수를 제안합니다. 바딘은 그 파동함수를 계산하여 BCS 이론을 완성합니다.

쿠퍼 쌍이 형성되는 근본 원리는 전자-포논 상호작용입니다. 포논의 격자진동 주기에 따라 스핀이 다른 두 전자가 이끌려오는 것입니다. 전자가 포논의 결맞음에 따라 행동함에 따라 초전도 전이온도의 한계는 30켈빈으로 제시합니다. 현재 30켈빈 이상에서 나타나는 고온초전도와 관련된 이론은 명확하지 않습니다.

쿠퍼 쌍의 형성을 정량적으로 살펴봅시다. 초전도의 근본은 쿠퍼 쌍입니다. 기본적으로 초전도는 보스-아인슈타인 응축 현상이기 때문에 페르미온인 전자는 초전자가 될 수 없습니다. 초전자는 보손이어야 하기 때문에 전자 2개가 필요합니다. 업-업 스핀이거나 다운-

다운 스핀으로 쌍을 이루어도 되지만 일반적인 경우는 업-다운 스핀의 전자쌍으로 스핀이 0이 되는 경우입니다. 페르미 면 위에 있는 두 전자를 가정하고 해밀토니안을 두 전자의 운동에너지와 상호작용 퍼텐셜 항의 합으로 표현합니다. 해밀토니안

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(r_1 - r_2) \text{이고 슈뢰딩거 방정식 } H\Psi(r_1, r_2, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r_1, r_2, t) \text{을}$$

만족해야 합니다. 파동함수를 질량중심 좌표계에서 질량 중심 벡터 함수와 상대좌표 함수로 분해하고 전체 운동량을 0으로 두어 상대 좌표 함수의 슈뢰딩거 방정식에 집중합니다.

$$\text{슈뢰딩거 방정식을 다시 정리하면 } \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} a_k + \sum_q \sum_{lm} V_l(k, q) Y_{lm}(\hat{k}) Y_{lm}^*(\hat{q}) a_q = E a_k \text{ 이고}$$

운동량 k, q 가 페르미 면 바로 위에 있을 때는 퍼텐셜이 존재하고 아래쪽은 퍼텐셜 영향이 없다고 가정합니다. 여기서 전자들끼리는 쿨롱 상호작용에 의해 척력이 작용하는데, 두 전자에 인력이 작용하기 위해선 두 전자 상호작용 사이에 포논이 매개되어야 합니다. 이온은 전하가 +이기 때문에 이온의 격자진동을 매개로 두 전자가 서로 끌어당겨질 수 있습니다. 이제 a_k 을 구면 조화함수로 표현하고, 퍼텐셜을 상수 λ_l 로 둔 다음 슈뢰딩거 방정식을 다시 쓰고 전자들이 무수히 많아 양자화 에너지가 연속적이라는 가정을 하면 다음과 같은

$$\text{식을 얻습니다. } -\frac{N(\epsilon_F)}{2} \ln \frac{2\epsilon_a - 2\epsilon_F + 2\Delta}{2\Delta} = -\frac{1}{V_l} \text{이고 } \Delta = \frac{\epsilon_a - \epsilon_F}{\exp\left\{\frac{2}{N(\epsilon_F) V_l}\right\} - 1}$$

입니다. 이는 전자 간 약한 상호작용만 있더라도 초전도 에너지 갭 Δ 이 존재함을 보여줍니다. 앞서 긴즈버그-란다우 이론에서도 보았듯이, 초전도의 자유 에너지는 일반 정상상태의 자유 에너지에 비해 낮기 때문에 그 차이만큼 에너지 갭이 생기고, 이를 응축 에너지라고 합니다. 예를 들어 초전도 전이온도가 10켈빈이라면 상호작용 퍼텐셜 에너지는 약 2meV정도입니다. 이 결과를 위 식에 대입하면 약 0.1K 정도의 에너지 갭을 얻을 수 있고 이는 0.086 meV 정도의 작은 에너지 갭입니다. 정리해서 페르미 면 위에 있는 두 전자가 아주 작은 상호작용을 갖는다고 하면, 두 전자 사이에서는 인력이 작용해 쿠퍼 쌍이 형성되면서 에너지가 낮아져 초전도 에너지 갭이 형성됩니다. 쿨롱 상호작용으로 척력이 작용하는 두 전자를 끌어당기는 근원은 양자화된 격자진동인 포논입니다.

이제 쿠퍼 쌍으로 형성된 초전자를 양자역학적으로 기술해야 합니다. 양자 역학 문제를 푸다는 것은 주어진 해밀토니안에서 고윳값과 고유벡터를 구하는 것입니다. 초전도에서 고유벡터는 쿠퍼 쌍의 파동함수일 텐데, 그 쿠퍼쌍이 많기 때문에 이들의 바닥상태를 나타내는 파동함수를 구하는 것은 어려운 일입니다. 슈리퍼는 이 문제를 풀기위해 파동함수가 다음과 같은 모양이 되어야 한다는 것을 알았습니다. 슈리퍼 파동함수는 다음과 같습니다.

$$|\psi_G\rangle = \prod_{k=k_1 \dots k_N} (u_k - v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger) |\phi_0\rangle \text{ 이제 쿠퍼 쌍을 기술하는 해밀토니안을 찾아야}$$

합니다. 다른 이름 BCS 해밀토니안은 다음과 같습니다.

$$H = \sum_{k\sigma} \xi_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \sum_{kl} V(\vec{k}, \vec{l}) c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger c_{-l\downarrow} c_{l\uparrow} \text{ 지금부터의 계산은 어려우니 결과만 보면}$$

초전도 전이온도가 다음과 같은 경향을 따른다는 것을 볼 수 있습니다.

$T_c \propto \omega_c \exp\left(-\frac{1}{N(0)V}\right)$ 이에 따라 30켈빈 이상에서의 초전도는 BCS 이론으로 설명할 수 없게 되는 것입니다. 하지만 그 이하의 온도에서는 이 챕터의 맨 위 그림처럼 BCS이론이 만드는 온도-에너지갭 그래프와 실측값들이 들어맞게 됩니다. 이 때문에 BCS 이론은 아직까지 초전도 현상을 설명하는 가장 중요한 이론으로 쓰이고 있습니다.