《 ______________기하 실생활 활용 수행평가 》

하이에듀

주제	체외 충격파 쇄석기에 들어간 타원의 원리
요약	자료1은 체외 충격파 쇄석기의 기본적인 내용에 대해서 설명이 된 자료입니다. 참고하셔서 1번을 적으시면 됩니다. 자료2는 연관된 수학적 내용으로 타원의 기본적인 내용에 대해 담겨있습니다. 자료3은 관련된 수학 문제로 모두 타원의 성질을 증명하는 증명 문제입니다. 체외 충격파 쇄석기와 가장 잘 어울리는 것은 1번과 2번이니 전체적으로 보시고 학생이 고르시는 증명문제를 잘 설명하면 됩니다. 자료4는 느낀점으로 예시로 적은 느낀점입니다. 참고하셔서 학생만의 느낌을 적어보세요.

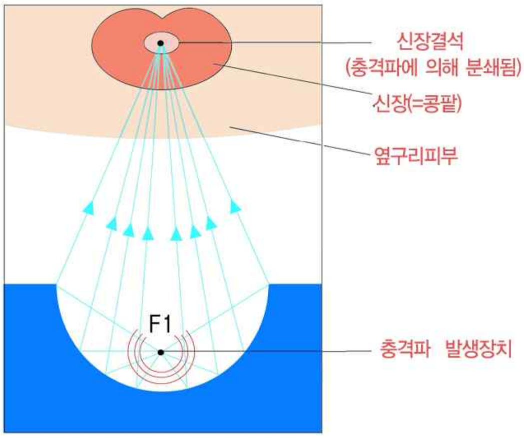
자료 1. 체외 충격파 쇄석기란?

1-1 체외 충격파의 역사

체외 충격파를 활용한 의료기기는 쇄석술로 부터 시작된다. 1960년대 후반에 신장결석과 담석과 같은 체내 결석을 직접적인 접촉 없이 분해하기 위하여 체외충격파를 생산하여 신체에 주장하는 주장이 등장했다. 의학적 목적을 위해 충격파를 사용하는 방법이 1970년대에 독일의 Domier에 의해 개발되었다. 사람을 대상으로 한 첫 번째 성공적인 쇄석술을 통해 이것이 거의 대부분의 신장결석과 수뇨관의 결석의 치료법으로 부상하였다. 1980년 2월에 처음으로 충격파를 신체 외부에서 적용시켜 환자의 몸안에서 신장결석을 성공적으로 파쇄 하였다. 충격파는 타원으로 이루어진 기기로부터 한 초점에서 조준하여 다른 초점에까지 도달하는 방식으로 결석을 파쇄 하였다. 충격파의 역학에너지는 신체로 전달되었고 조직에 심각한 손상을 주지 않으면서 결석에 그 영향을 강력하게 주는 획기적인 방식이었다. 결석의 파편들은 알갱이가 되어 자연적으로 요도를 통해 방출되었으며 결국 외과적인 수술이 필요 없게 되었다. 이건은 결석제거에 획기적인 패러다임을 제시한 것이었다.

1-2 체외 충격파 쇄석술의 원리

체외 충격파 쇄석술은 타원체(타원을 회전시켜 얻은 입체도형)의 끝에 반사경 컵에 달려있고 전극 봉을 타원의 초점에 설치해 놓는다.

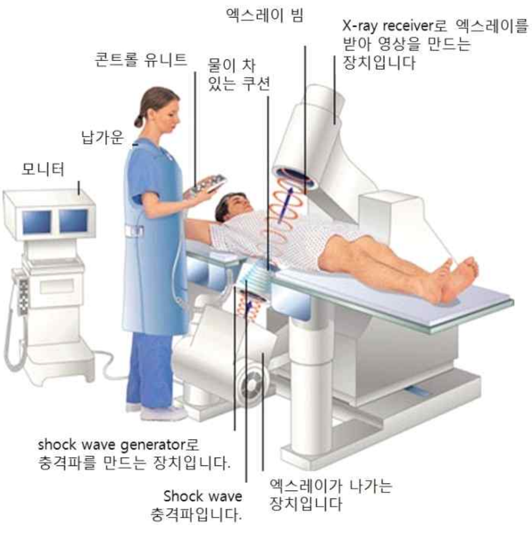


(그림4) 체외 충격파 쇄석술 가상 이미지(1)

엑스선 형광 투시경을 이용하여 환자의 신장 결석이 타원의 다른 초점에 일치하도록 환자를 자리 잡게 한 후 전극 봉에서 충격파를 쏘아 타원체의 면에 반사되어 신장의 결석을 부수게 하는 원리이다.

다음 쇄석기의 모습을 보면, 체외충격파 쇄석기는 크게 3부분으로 구성된다. 첫 번째는 충격파 발생장치이고, 두 번째는 충격파 전달매체이며 세 번째는 결석의 위치를 찾는 장치이다.

쇄석기의 원리는 압박 분쇄(compression fracture), 파쇄(spallation), 음파의 공동화현상(acoustic cavitation), 역동적 충격파 누적(dynamic fatigue) 4가지 원리를 이용한다.



체외 충격파 쇄석기의 모습

1-3 체외 충격파 발생장치의 발전

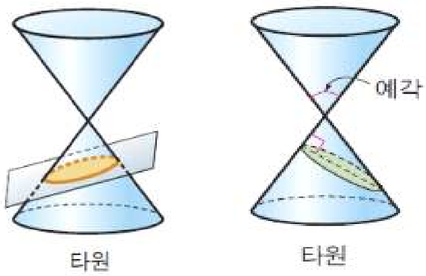
체외충격파 발생장치는 결석을 파괴시키는 충격파를 발생시키는 장치로서 현재 4세대까지 개발이 되어있다. 1세대는 폭발작용에 의해서 발생한 충격파가 타원모양의 장치에 반사

되어 한 점으로 모이는 원리를 이용한다. 2세대는 표면의 진동으로 인한 충격파를 발생시킨다는 점에서 1세대와 차이가 있고, 이때문에 통증이 덜한 치료가 가능하다는 것이 장점이다. 3, 4세대는 크기가 이전 세대보다 작아 휴대하기 편리하고 충격파의 파쇄력이 증가하였으며, x-ray나 초음파를 이용해 결석의 위치를 확인할 수 있기 때문에 더 효율적인 치료가 가능하다.

자료 2. 연관된 수학적 내용

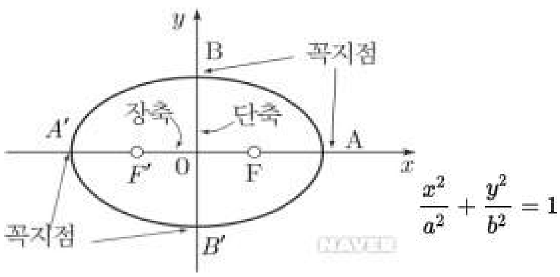
2-1 타원의 정의와 성질

먼저 타원의 초점을 이용한 신장결석파쇄기에 대해 탐구하기에 앞서 타원의 정의와 성질에 대한 조사가 선행되어야 된다고 생각하여 먼저 타원에 대해서 조사하였다.
타원은 이차곡선의 일부분인데, 이차곡선은 이차식으로 나타낼 수 있는 곡선이며 원뿔곡선이라고도 한다. 원뿔곡선은 영어로 Conic section이라고 하는데, 이를 직역하면 원뿔의 단면이라는 뜻이다. 원뿔 곡선은 원뿔의 축에 대한 평면의 기울기가 모선의 기울기에 비하여 큰가, 작은가, 같은가에 따라서 각각 쌍곡선, 타원, 포물선이 된다. 타원을 알려면 이차곡선에 대해서 알아야하는데, 타원은 원뿔을 밑면과 비스듬하게 자르면 나오는 단면이다.



(그림1) 원뿔에서 나온 타원

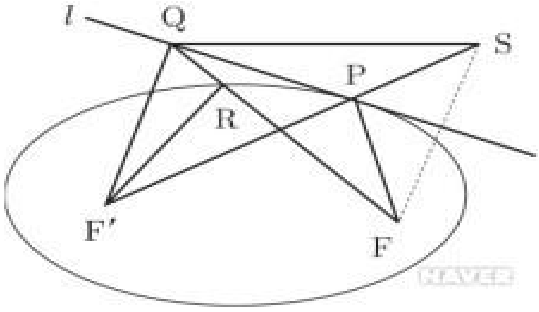
타원의 수학적 정의는 평면 위 두 정점(定點)으로부터의 거리의 합이 일정한 점의 자취를 말한다. 이 때 두 정점을 타원의 초점, 선분 AA', BB'을 타원의 축이라 부르며 이 중 초점을 지나는 축인 AA'를 타원의 장축, BB'을 타원의 단축이라 한다.
그리고 두 축의 교점 O를 타원의 중심, 타원이 두 축과 만나는 네 점 A, A', B, B'을 타원의 꼭짓점이라 한다.



타원

자료 3. 수학적 내용과 관련된 문제 풀이 과정

3-1 타원의 성질 증명 (광학적 특성)



<증명>

초점 F의 직선 l에 대한 대칭점을 S, 접선 위의 임의의 점 Q에 대하여 와 타원의 교점을 $\overline{Q}$ R라고 하자. P, R는 타원 위의 점이므로

$\overline{PF'}+\overline{PF}=\overline{RF'}+\overline{RF}$

$\triangle QF'P$에서 $\overline{RF'}\leq\overline{QF'}+\overline{QR}$

$\overline{PF'}+\overline{PF}\leq\overline{QF'}+\overline{QR}+\overline{RF}$

$\therefore\overline{PF'}+\overline{PF}\leq\overline{QF'}+\overline{QF}$ …①

접선l에 대하여 F와 S는 서로 대칭점이므로

$\overline{PF}=\overline{PS}$, $\overline{QF}=\overline{QS}$

①은 $\therefore\overline{PF'}+\overline{PS}\leq\overline{QF'}+\overline{QS}$

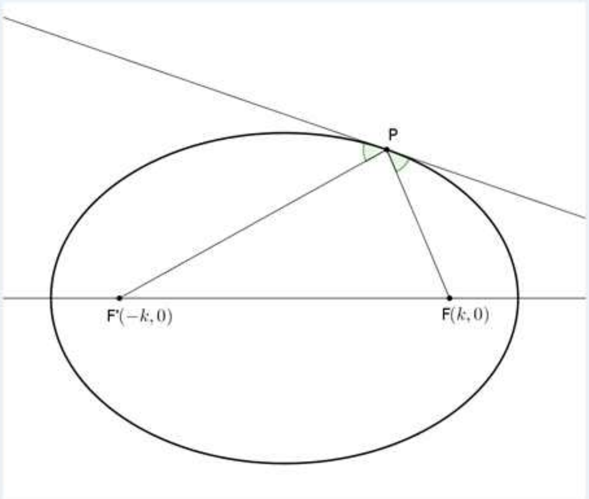
점 Q는 직선 l위의 임의의 점이므로 부등식 ①이 항상 성
립 하기 위해서는 $\overline{PF'}+\overline{PS}$가 최소가 되어야 되므로, P는 선분 $F'S$와 접선 l의 교점이다. 곧, 세 점 F', P, S는 일직선 위에 있다. 따라서 오른쪽 그림에서 $\alpha=\beta$ ($\because$ F, S는 l에 대칭), $\beta=\gamma$ ($\because$ 맞꼭지각)이므로 $\therefore$ $\alpha=\gamma$

곧, $\overline{PF'}$과 l, $\overline{PF}$와 l이 이루는 두 예각의 크기는 서로 같다.

3-2 타원과 빛의 성질 - 2

증명 01

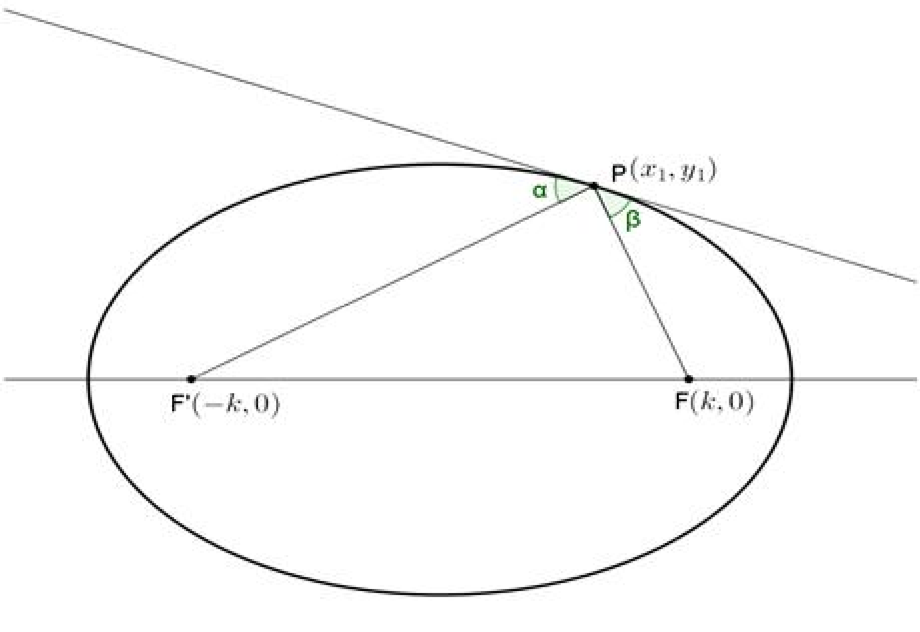
타원의 접선이 $\overline{PF}$, $\overline{PF}'$와 이루는 각의 크기가 같다.



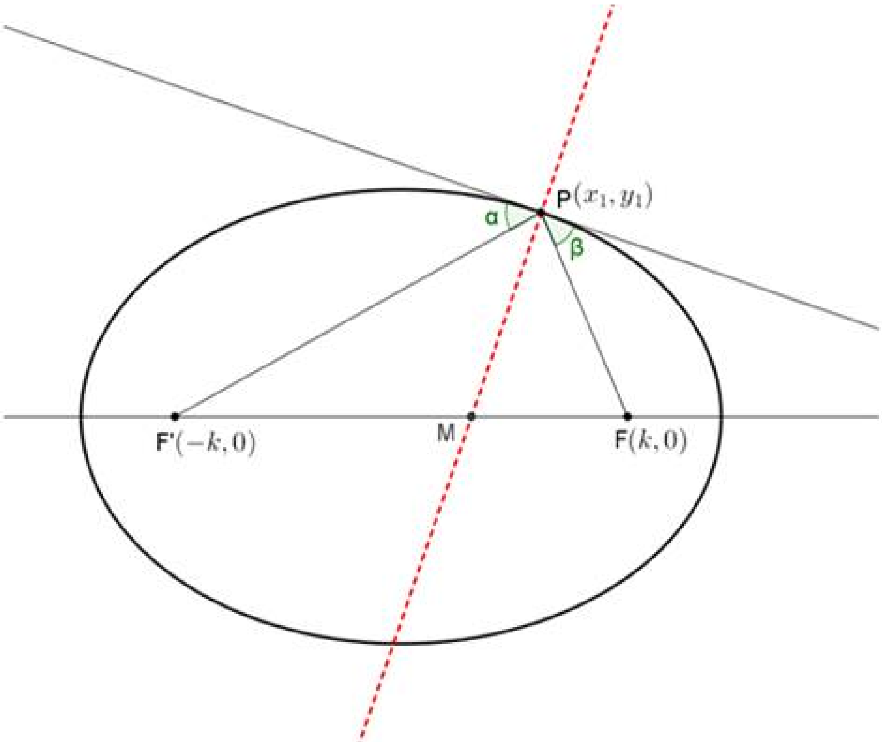
1단계 무엇을 보이면 증명이 되는가?

그림을 통해서 상황을 파악해보면

1 : 접선과 $\overline{PF}, \overline{PF'}$가 이루는 각을 결정한다.

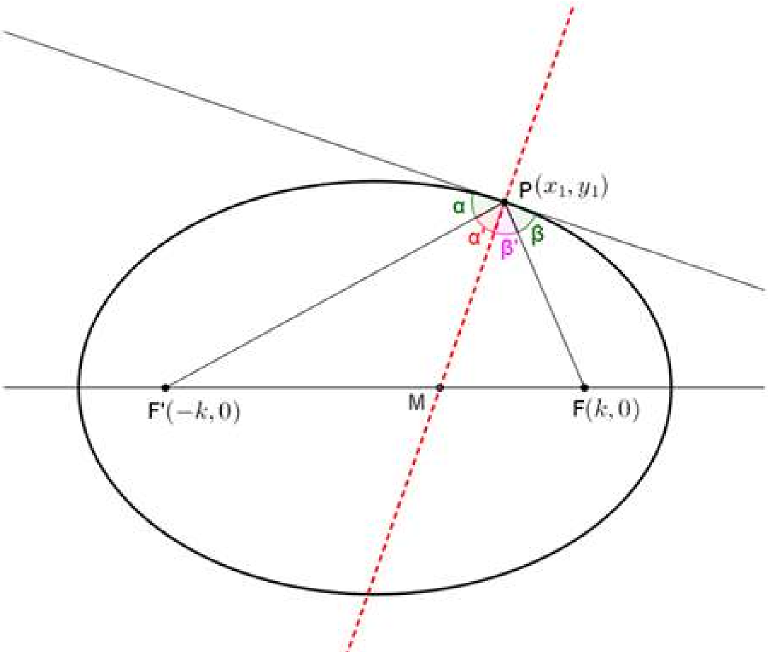


2 : 접점에서 접선에 수직인 선을 긋는다.



3 : $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha' = \beta'$성립해야 한다. 따라서 각의 이등분석이 성립하기 위한 조건을 만족하면 된다.

$\overline{PF}:\overline{PF'} = \overline{FM}:\overline{F'M} \Leftrightarrow \overline{PF}\times\overline{F'M} = \overline{PF'}\times\overline{FM}$이 성립함을 증명하면 된다.



02단계 각이 이등분선 성립 확인

기본적인 조건 설정

① **타원방정식** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

② **두 초점** $F(k,0)$, $F'(-k,0)$

③ **접점**$P(x_1,y_1)$

접점에 수직인 직선구하기

접선의 방정식 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ **에서 접선의 기울기는** $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ **이다.**

그래서 접점에서 수직인 직선의 기울기는 $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ **이 된다.**

그래서 접점에서 수직인 직선의 방정식은

$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$ **이 된다.**

접선의 수직인 직선의 x**절편인 점M 구하기**

$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$**에서** $y=0$**을 대입하면** $x=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x_1$ **이 된다.**

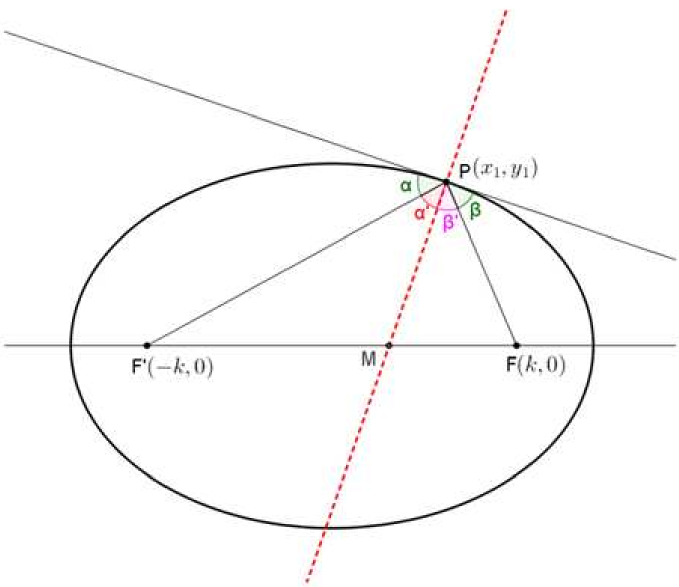
$\Rightarrow M\left(\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x_1,0\right)$

각의 이등분선이 성립하기 위한 조건 만족하기

$$\overline{PF} : \overline{PF'} = \overline{FM} : \overline{F'M} \Leftrightarrow \overline{PF} \times \overline{F'M} = \overline{PF'} \times \overline{FM}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x_1-k)^2+y_1^2}$$
$$\overline{P'F} = \sqrt{(x_1+k)^2+y_1^2}$$
$$\overline{FM} = k-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x_1$$
$$\overline{F'M} = k+\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x_1$$

여기에 대입하면 $\overline{PF} \times \overline{F'M} = \overline{PF'} \times \overline{FM}$ 성립하는 것을 알수 있습니다.
계산이 좀 복잡해서 직접 계산은 생략합니다.



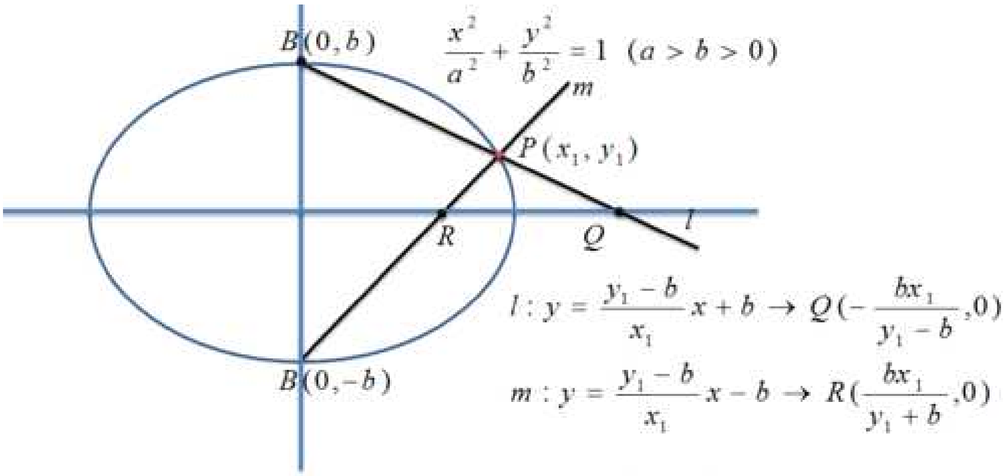
$$\overline{PF} \times \overline{F'M} = \overline{PF'} \times \overline{FM} \Rightarrow \alpha' = \beta' \Rightarrow \alpha = \beta$$

∴ 타원의 접선이 $\overline{PF}$, $\overline{PF'}$와 이루는 각의 크기가 같다.

출처 : https://j1w2k3.tistory.com/894

3-3 타원의 성질

어떤 임의의 타원의 단축의 꼭짓점에서 타원 위의 임의의 점 P에 직선을 그을 때 이 직선이 장축을 이루는 직선과 만나는 점을 점 Q, 점 R이라고 하면 타원의 중심에서 점 Q와 점 R을 이은 두 직선의 길이의 곱은 장축의 제곱이 된다.



$$\overline{OQ}\cdot\overline{OR} = -\frac{bx_1}{y_1-b}\cdot\frac{bx_1}{y_1+b} = \frac{-b^2x_1^2}{y_1^2-b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \rightarrow b^2x_1^2 = a^2(b^2-y_1^2)$$

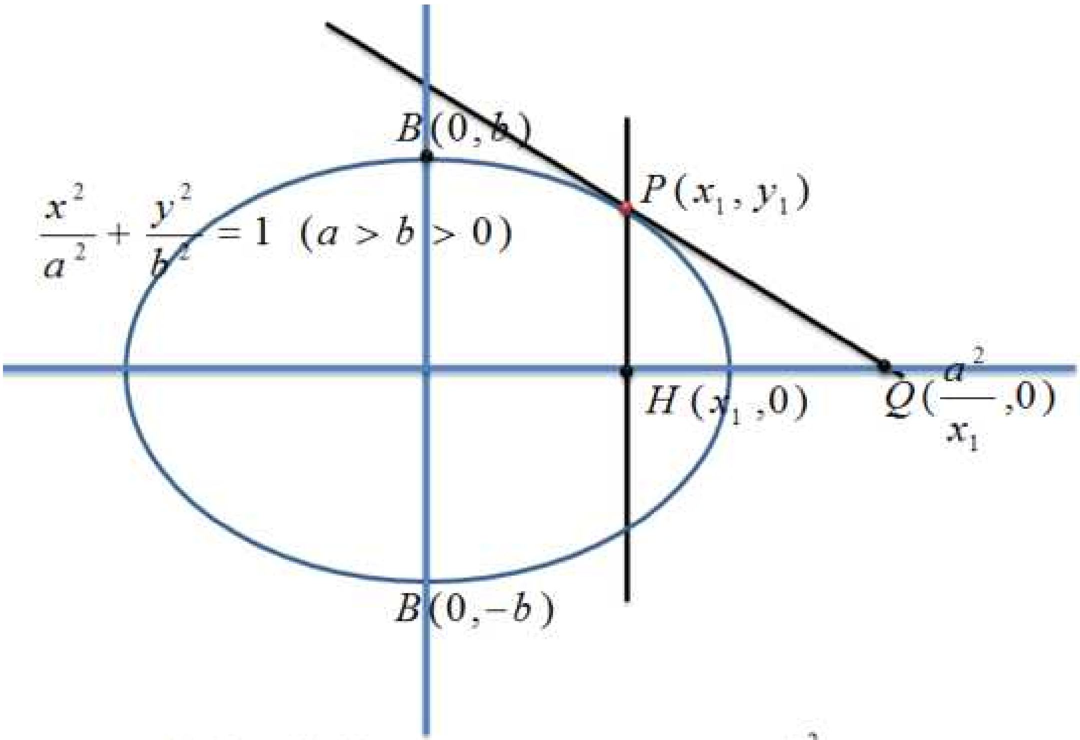
$$\swarrow$$

$$\overline{OQ}\cdot\overline{OR} = -\frac{bx_1}{y_1-b}\cdot\frac{bx_1}{y_1+b} = \frac{-b^2x_1^2}{y_1^2-b^2} = a^2$$

3-4 타원의 성질

어떤 임의의 타원 위의 임의의 점 P에서 장축에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서의 접선과 장축을 이루는 직선이 만나는 교점을 Q라 할 때 타원의 중심에서 점 H와 점 Q에 그은 두 선분의 길이는 일정하다.

(증명)



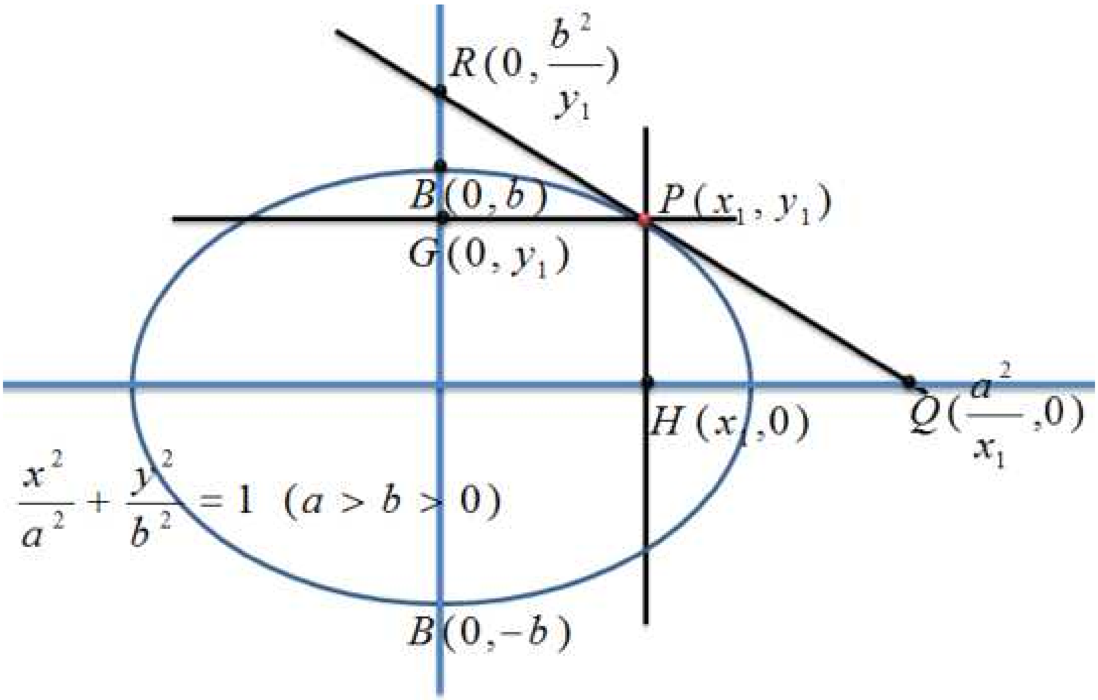
$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \rightarrow H(x_1, 0),\ \ Q(\frac{a^2}{x_1}, 0)$$

$$\overline{OH} \cdot \overline{OQ} = x_1 \cdot \frac{a^2}{x_1} = a^2$$

3-5 타원의 성질

어떤 임의의 타원 위의 임의의 점 P에서 장축에 내린 수선의 발을 H, 단축에 내린 수선의 발을 G 이때 점 P에서의 접선과 장축을 이루는 직선이 만나는 교점을 Q라 단축을 이루는 직선과 만나는 점을 R이라 할 때 타원의 중심과 점 P, G, H가 이루는 직사각형의 면적을 S 그리고 타원의 중심과 점 Q, R이 이루는 삼각형의 넓이를 T라 할 때 S · T는 일정하다.

(증명)



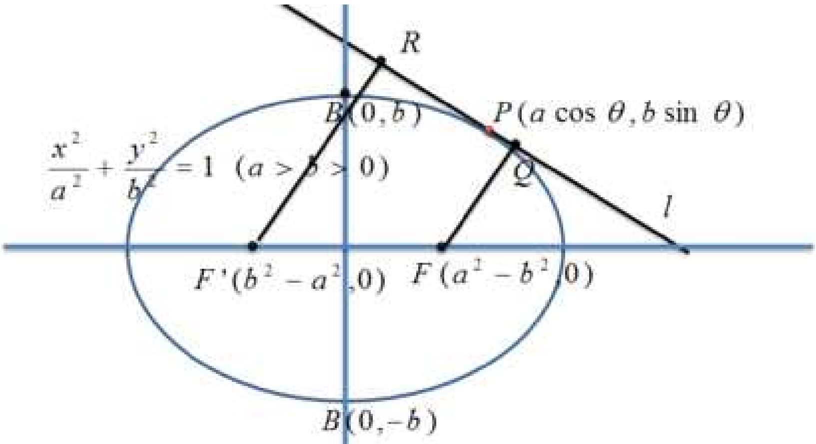
$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \rightarrow S = x_1 y_1, \quad T = \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{x_1} \times \frac{b^2}{y_1}$$

$$S \cdot T = \frac{a^2 b^2}{2}$$

3-6 타원의 성질

어떤 임의의 타원이 있을 때 그 타원의 두 초점 F, F'에서 타원 위의 임의의 점 P에 수선의 발을 내릴 때 수선의 발을 각각 점 Q, 점 R이라 하면 선분 FQ와 선분 F'R의 곱은 일정하다.

(증명)



$$l:\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1 \rightarrow xb\cos\theta+ya\sin\theta-ab=0,\ c^2=a^2-b^2$$

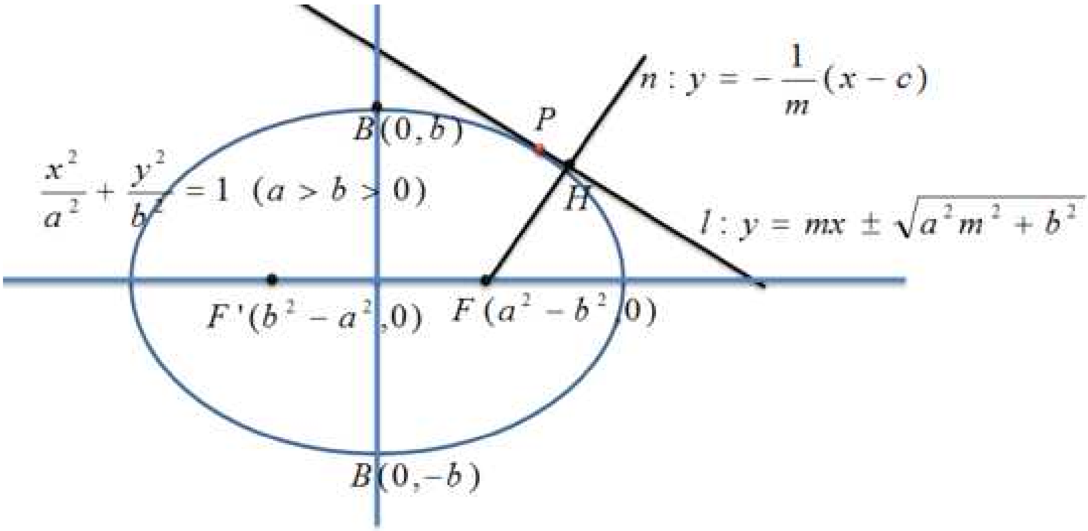
$$\overline{FQ}=\frac{|bc\cos\theta-ab|}{\sqrt{(b\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}},\quad \overline{F'R}=\frac{|-bc\cos\theta-ab|}{\sqrt{(b\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}}$$

$$\overline{FQ}\cdot\overline{F'R}=\frac{\left|-(bc\cos\theta)^2+(ab)^2\right|}{(b\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}=\frac{\left|-a^2(b\cos\theta)^2+b^2(b\cos\theta)^2+(ab)^2\right|}{(b\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{b^2\left|-(b\cos\theta)^2-(a\sin\theta)^2\right|}{(b\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}=b^2$$

3-7 타원의 성질

어떤 임의의 타원의 한 초점에서 이 타원 위의 임의의 점 P에서의 접선에 내린 수선의 발 H의 자취는 원이다.



$$(y-mx)^2 = a^2m^2+b^2 \rightarrow y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2m^2+b^2 \cdots\cdots \alpha$$

$$(x+my)^2 = c^2 = a^2-b^2 \rightarrow x^2 + 2mxy + m^2y^2 = a^2-b^2 \cdots\cdots \beta$$

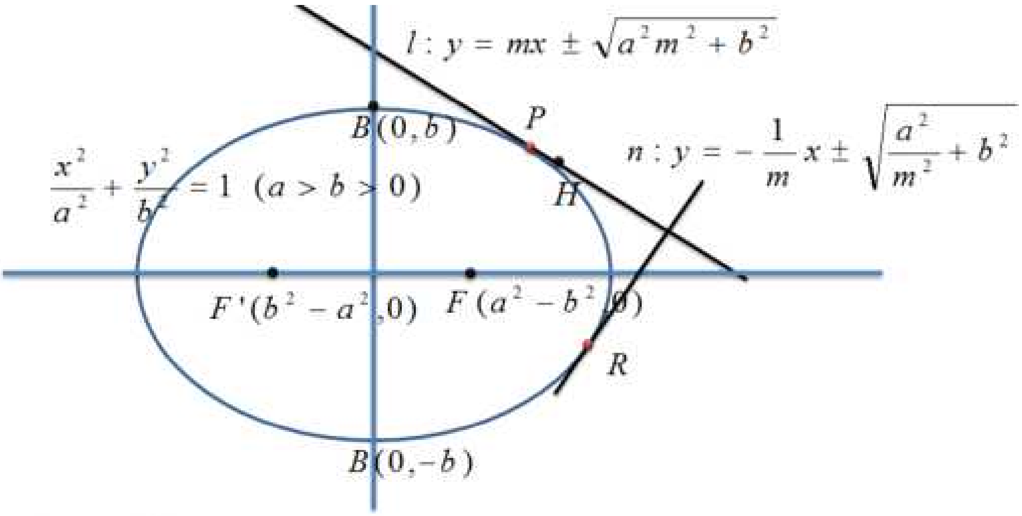
$$\alpha + \beta = (m^2+1)x^2 + (m^2+1)y^2 = a^2(m^2+1)$$

$$\therefore x^2 + y^2 = a^2$$

3-8 타원의 성질

어떤 임의의 타원이 있을 때 이 타원 위의 두 점의 접선이 서로 수직이면 두 접선의 교점의 자취는 원이다.

(증명)



$$(y - mx)^2 = a^2m^2 + b^2 \rightarrow y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2m^2 + b^2 \cdots\cdots \alpha$$

$$(x + my)^2 = m^2\left(\frac{a^2}{m^2} + b^2\right) \rightarrow x^2 + 2mxy + m^2y^2 = a^2 + m^2b^2 \cdots\cdots \beta$$

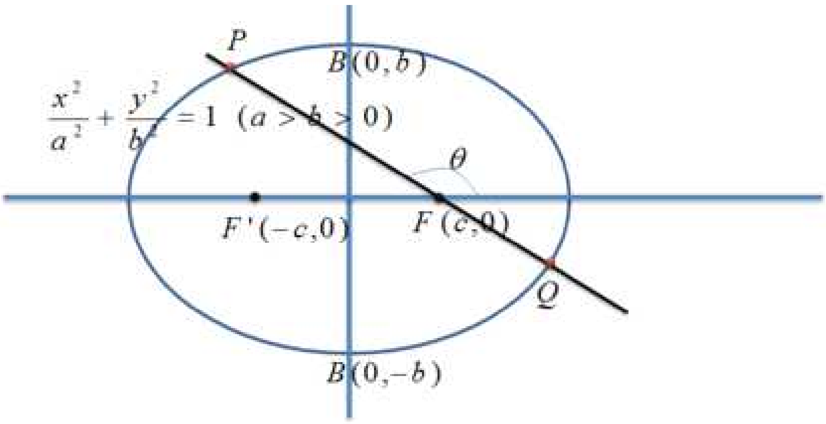
$$\alpha + \beta = (1 + m^2)x^2 + (1 + m^2)y^2 = a^2(1 + m^2) + b^2(1 + m^2)$$

$$\therefore x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

3-9 타원의 성질

어떤 임의의 타원이 있을 때 이 타원의 한 초점을 지나는 직선이 타원과 만나는 점을 P, Q라 할 때 선분 PF의 역수와 선분 QF의 역수의 합은 일정하다.

(증명)



$$\overline{PF} = r,\ \overline{PF'} = 2a - r \rightarrow \cos\theta = \frac{(2c)^2 + r^2 - (2a-r)^2}{2\cdot 2cr}$$

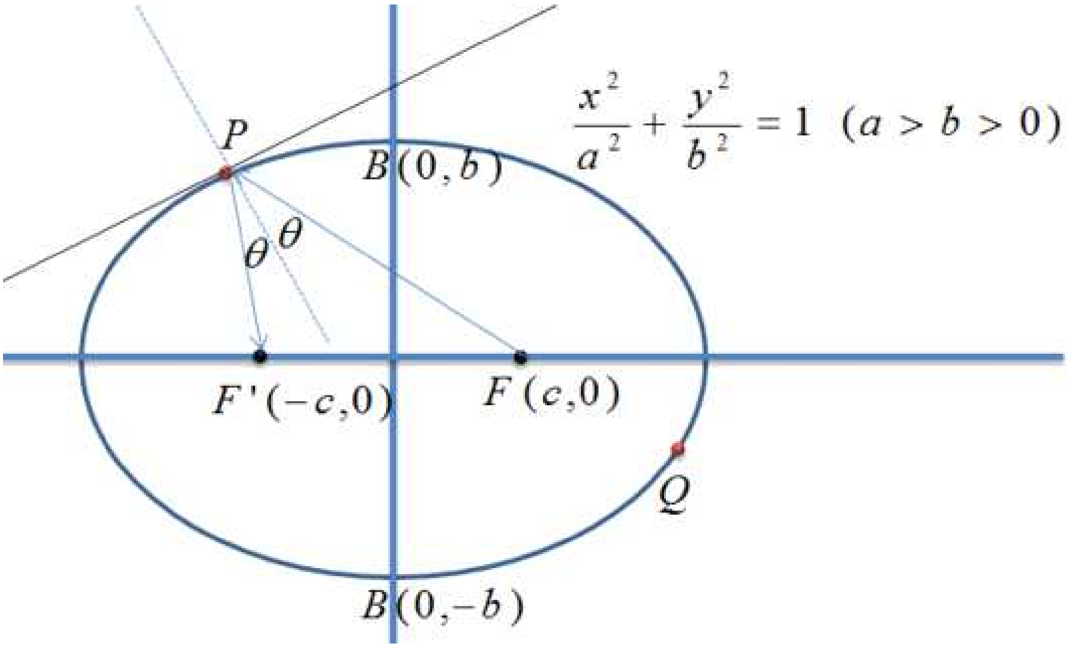
$$\therefore 4c^2 + 4ar - 4a^2 = 4cr\cos\theta \rightarrow b^2 = r(a + c\cos\theta) \rightarrow r = \frac{b^2}{(a + c\cos\theta)}$$

$$\overline{PF} = \frac{b^2}{(a + c\cos\theta)},\ \overline{QF} = \frac{b^2}{(a - c\cos\theta)} \Rightarrow \frac{1}{\overline{PF}} + \frac{1}{\overline{QF}} = \frac{2a}{b^2}$$

3-10 타원의 성질

어떤 임의의 타원이 있을 때 이 타원의 한 초점에서 타원 위의 임의의 한 점에 반사시키면 다른 초점으로 간다.

(증명)



출처 : https://m.blog.naver.com/PostView.naver?isHttpsRedirect=true&blogId=jiumnara&logNo=220740772179

자료 4. 느낀점

아래 예시는 아주 포멀하게 적은 예시 느낀점입니다. 위 자료들을 참고하여 규리 학생만의 느낀점을 적어보세요.

EX) 이번 수행평가를 통해서 근본적으로 타원이 가진 성질에 대해서 더 자세하게 알 수 있었고 이러한 타원의 성질을 활용한 생명공학 의료 기기가 존재한다는 사실을 알게 되었다. 무작정 타원에 대해서 공부할 때에는 몰랐던 타원의 중요성을 알게된 중요한 계기가 되었고 공부하는 과정에서 이러한 원리와 필요성에 대해서 인지하게 되니 더 재미있고 확실하게 이해할 수 있었다. 앞으로 더 많은 수학적, 과학적 실생활 활용이 어떤 것이 있는지 찾아봐야겠다고 생각하게 되었다.